

Matrices

1. Calcular la matriz X , tal que $XB + A = C$; siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

junio 1997

Solución

$$X \cdot B + A = C \Rightarrow X \cdot B = C - A \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = (C - A) \cdot B^{-1} \Rightarrow X \cdot I = (C - A) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = (C - A) \cdot B^{-1}.$$

$$\text{Por un lado: } C - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por otro, el determinante de la matriz B es (regla de Sarrus):

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+12+0) = -12. \text{ Como } |B| \neq 0, \text{ existe } B^{-1}, \text{ que la calcularemos mediante la}$$

fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t$, donde B^d es la matriz adjunta de B . Esta última es $B^d = (B_{ij})$, en la que B_{ij} son los

adjuntos de la matriz B : $B_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} = \begin{cases} \Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -\Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$, y donde Δ_{ij} es el menor complementario de

orden 2 correspondiente a la fila i y a la columna j (determinante de orden 2 que resulta de eliminar la fila i y la columna j):

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3, B_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4, B_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6,$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -6, B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, B_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0,$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3, B_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0, B_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6.$$

Por tanto $B^d = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ y $(B^d)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, y la matriz inversa de B es:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{12} & \frac{6}{12} & -\frac{3}{12} \\ \frac{4}{12} & 0 & 0 \\ \frac{6}{12} & 0 & \frac{6}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Así pues } X = (C - A) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} . \dagger$$

2. Encontrar la matriz X , Sabiendo que $B(A - I) = AXA$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

septiembre 1997

Solución

$$B \cdot (A - I) = A \cdot X \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot B \cdot (A - I) \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot (A - I) \cdot A^{-1}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+4+0) - (-2+8+0) = 7 - 6 = 1. \text{ Entonces } A \text{ tiene inversa y es } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t.$$

Procediendo como en el ejercicio anterior, la matriz adjunta de A es $A^d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$

$$\text{Entonces: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } X &= A^{-1} \cdot B \cdot (A - I) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 2 & 5 \\ 62 & 6 & 12 \\ -50 & -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 73 \\ 50 & 106 & 168 \\ -40 & -84 & -133 \end{pmatrix} . \dagger \end{aligned}$$

3. Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$ y determinar la matriz X , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

junio 1998

Solución

$$A^2 \cdot X - B = A^2 \Rightarrow A^2 \cdot X = A^2 + B \Rightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot (A^2 + B).$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; |A^2| = 4 \text{ (} A^2 \text{ es diagonal y el determinante de una matriz}$$

diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal). Por tanto A^2 tiene inversa, que es $(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \left((A^2)^d \right)^t$. La matriz adjunta de A^2 es (procediendo de manera similar a cómo se hizo en el ejercicio 1):

$$(A^2)^d = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto: } (A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \left((A^2)^d \right)^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, finalmente:

$$X = (A^2)^{-1} \cdot (A^2 + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Estudiar el rango de A , según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de a existe A^{-1} .

junio 1998

Solución

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad según la cual el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos. Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left((a+1)^2 + 0 - a \right) - \left(-a^2(a+1) + 1 + 0 \right) = (a^2 + a + 1) - (-a^3 - a^2 + 1) = a^3 + 2a^2 + a.$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2a^2 + a) - (a^2(a+1) + 0 + 2a(a+1)) = (2a^2 + a) - (a^3 + 3a^2 + 2a) = -a^3 - a^2 - a.$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a+1 & -a & a \\ 1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2a^3 + a) - (0 + 0 + 2a(a+1)) = (-2a^3 + a) - (2a^2 + 2a) = -2a^3 - 2a^2 - a.$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a+1 & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2a^2 + a(a+1)) - (0 + 0 + 2a) = (-a^2 + a) - 2a = -a^2 - a.$$

Observemos ahora que:

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + 2a + 1) = 0 \Leftrightarrow a(a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = -1.$$

$$A_2 = 0 \Leftrightarrow -a^3 - a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ (la ecuación } a^2 + a + 1 = 0 \text{ no tiene soluciones reales).}$$

$$A_3 = 0 \Leftrightarrow -2a^3 - 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a(2a^2 + 2a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ (la ecuación } 2a^2 + 2a + 1 = 0 \text{ no tiene soluciones reales).}$$

$$A_4 = 0 \Leftrightarrow -a^2 - a = 0 \Leftrightarrow -a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = -1.$$

Por tanto $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \Leftrightarrow a = 0$. En este caso la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es

claramente 2 (es fácil encontrar un menor de orden 2 distinto de cero).

Sin embargo si $a \neq 0$ alguno de los determinantes $|A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|$ será necesariamente distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

$$\text{Resumiendo: } \text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

No existe ningún valor de a para el que exista A^{-1} , pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas). †

5. Determinar la matriz X , sabiendo que $X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

septiembre 1998

Solución

$$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2 \Leftrightarrow X \cdot A^2 = A^2 - B \cdot A \Leftrightarrow X = (A^2 - B \cdot A) \cdot (A^2)^{-1}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ y, en este caso se tiene que } (A^2)^{-1} = I^{-1} = I.$$

$$\text{Entonces } X = (A^2 - B \cdot A) \cdot (A^2)^{-1} = (I - B \cdot A) \cdot I = I - B \cdot A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \dagger$$

6. Estudiar el rango de A , según los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t+1 & t & t+1 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de t , existe A^{-1} .

septiembre 1998

Solución

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad que dice que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & t+1 & t \end{vmatrix} = (t^2 + 1 + 0) - (0 + 0 + t + 1) = t^2 - t.$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = (t(t+1) + 0 + 0) - (t + 0 + 0) = (t^2 + t) - t = t^2.$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & t+1 \end{vmatrix} = (t + 1 + 0 + 0) - (1 + 0 + 0) = t.$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \end{vmatrix} = (t + 1 + 0 + t^2) - (t + 1 + 0 + 0) = t^2.$$

Observemos ahora que:

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o } t = 1. \quad A_2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$A_3 = 0 \Leftrightarrow t = 0. \quad A_4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Por tanto $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \Leftrightarrow t = 0$. En este caso la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es

claramente 2, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

Sin embargo si $t \neq 0$ cualquiera de los determinantes $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_4|$ será distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

$$\text{Resumiendo: } \text{rango}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \neq 0 \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

No existe ningún valor de t para el que exista A^{-1} , pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas ya que para éstas no está definido el determinante). †

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz no es invertible. Hallar la inversa de A para $x=2$.

junio 1999

Solución

Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo. Calculemos pues los valores de x que anulan el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (x^2+0+0) = 1-x^2. \quad |A|=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ó } x=-1.$$

Por tanto, A no tiene inversa cuando $x=1$ o cuando $x \neq -1$, ya que en estos casos $|A|=0$.

Si $x=2$, la matriz A es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y su determinante será $|A|=1-2^2=-3$. La inversa de la matriz

$$A \text{ será } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t. \text{ Procediendo como en el ejercicio 1: } A^d = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \dagger$$

8. Determinar la matriz X que verifica $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

septiembre 1999

Solución

$$AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AXA = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BA^{-1}. \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (-2) = -1.$$

$$\text{La matriz adjunta de } A \text{ es } A^d = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ luego: } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \dagger$$

9. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$.

junio 2000

Solución

Como $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3Y$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\left[\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3Y\right] - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -6 & 81 \end{pmatrix} - 9Y - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -11Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -6 & 81 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -11Y = \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Sustituyendo: $X = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.†

10. Hallar una matriz X que verifique la condición $A + BX = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

septiembre 2000

Solución

$A + BX = C \Leftrightarrow BX = C - A \Leftrightarrow X = B^{-1}(C - A)$.

$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. Por tanto, B tiene inversa. La adjunta de B es:

$B^d = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = B^{-1}(C - A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.†

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A .
b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación $AX = B$.

junio 2001

Solución

a) Determinante de A : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0-1) = -3$ (desarrollando por los elementos de la primera columna). Como el determinante de A es distinto de cero, la matriz A tiene inversa.

Matriz adjunta de A : $A^d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (sígase el proceso explicado en el ejercicio 1).

Traspuesta de la adjunta de A : $(A^d)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz inversa de A : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1º) Halla la inversa de $A - BC$. 2º) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

septiembre 2001

Solución

1º) Hallemos la inversa de $A - BC$:

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A - BC| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 0 + 3) - (-3 + 0 + 1) = -3 - (-2) = -1.$$

Por tanto, la matriz $A - BC$ tiene inversa. Hallemos su adjunta: $(A - BC)^d = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Y, por último, la inversa: } (A - BC)^{-1} = \frac{1}{|A - BC|} \left((A - BC)^d \right)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2^{\circ}) AX - BCX = A \Leftrightarrow (A - BC)X = A \Leftrightarrow X = (A - BC)^{-1} A.$$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}.$$

13. Resuelve la ecuación matricial $XA - 2B + 3C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

septiembre 2002

Solución

$$XA - 2B + 3C = D \Leftrightarrow XA = 2B - 3C + D \Leftrightarrow X = (2B - 3C + D)A^{-1}.$$

$$2B - 3C + D = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Hallemos ahora la inversa de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2; A^d = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces: } X = (2B - 3C + D)A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/2 & -14 \\ -14 & 21 \end{pmatrix}.$$

14. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real. Encuentra los valores

de λ para los que la matriz $A \cdot B$ es invertible.

junio 2003

Solución

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B \text{ no tendrá inversa siempre que } |A \cdot B| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\lambda - (1-\lambda)(3+2\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1+2\lambda - 3 - 2\lambda + 3\lambda + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{8}{4} = -2 \end{cases}.$$

Por tanto $A \cdot B$ será invertible siempre que $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\lambda \neq -2$. †

15. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Comprueba que se verifica $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
- b) Justifica que A tiene inversa.

septiembre 2003

Solución

$$a) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

- b) Se puede hacer comprobando que el determinante de A es distinto de 0. Pero lo haremos utilizando el apartado anterior: $A^3 + I = O \Leftrightarrow -A^3 = I \Leftrightarrow -A^2 \cdot A = A \cdot (-A^2) = I$.

$$\text{De aquí se deduce claramente que } A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \dagger$$

16. a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación $C(A+X)B=I$ donde A , B y C son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n .

b) Aplica el resultado anterior para $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

junio 2004

Solución

a) $C(A+X)B=I \Leftrightarrow A+X=C^{-1}B^{-1} \Leftrightarrow X=C^{-1}B^{-1}-A$.

b) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$. Por tanto, C tiene inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} (C^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$. Por tanto, B tiene inversa: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces: $X = C^{-1}B^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. †

17. Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ambas son de rango 3. ¿Qué ocurre si

las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ .

septiembre 2004

Solución

Ocurre que el rango no tiene porqué conservarse. Veámoslo con las matrices A y B :

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

$$|A + \lambda B| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = (4\lambda + 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2) - (2 + 3\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^3) = -2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2.$$

$|A + \lambda B| = 0 \Leftrightarrow -2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow -2(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ó $\lambda = 1$. Por tanto:

✓ Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A + \lambda B) = 3$.

✓ Si $\lambda = -1$, $A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A + \lambda B) = 2$, pues hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

✓ Si $\lambda = 1$, $A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A + \lambda B) = 2$, pues hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2. \dagger$$

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Halla la matriz inversa de $(A - I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.
 b) Halla la matriz X solución de la ecuación $X \cdot A - 2B = X$.

septiembre 2004

Solución

a) $A - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$|A - I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(2 - 3) = 1$ (desarrollando por los elementos de la tercera fila). Entonces

$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \left((A - I)^d \right)^t = \frac{1}{1} \left((A - I)^d \right)^t = \left((A - I)^d \right)^t.$

La matriz adjunta de $A - I$ es: $(A - I)^d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto: $(A - I)^{-1} = \left((A - I)^d \right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $X \cdot A - 2B = X \Leftrightarrow X \cdot A - X = 2B \Leftrightarrow X(A - I) = 2B \Leftrightarrow X = 2B(A - I)^{-1}.$

Luego: $X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$ †

19. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores

de m para los que $A \cdot B$ tiene inversa.

septiembre 2005

Solución

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B \text{ no tiene inversa} \Leftrightarrow |A \cdot B| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(2+2m)(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ ó } m = 1. \dagger$$

20. a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X + A)^2 = X^2 + X \cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B \cdot X + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

junio 2006

Solución

a) Por un lado, $(X + A)^2 = (X + A)(X + A) = X^2 + X \cdot A + A \cdot X + A^2$.

$$\text{Entonces: } (X + A)^2 = X^2 + X \cdot A + I_2 \Leftrightarrow X^2 + X \cdot A + A \cdot X + A^2 = X^2 + X \cdot A + I_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot X + A^2 = I_2 \Leftrightarrow A \cdot X = I_2 - A^2 \Leftrightarrow X = A^{-1}(I_2 - A^2).$$

b) $B \cdot X + B^2 = I_2 \Leftrightarrow B \cdot X = I_2 - B^2 \Leftrightarrow X = B^{-1}(I_2 - B^2)$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1; \quad B^d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (B^d)^t = B^d = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por tanto: } B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por otro lado, } I_2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces } X = B^{-1}(I_2 - B^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \dagger$$

21. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene inversa la matriz A ? (No se pide hallarla).

junio 2007

Solución

Como en la matriz A hay un menor de orden 2 distinto de 0, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, el rango de A es al menos 2, sea quien sea el valor de λ .

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4\lambda^2 - 2 + 0) - (0 - 2 + 2\lambda) = 4\lambda^2 - 2\lambda.$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(2\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = \frac{1}{2}.$$

De aquí se deduce que: $\text{rango}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = \frac{1}{2} \\ 3 & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ y que la matriz A tendrá inversa siempre que $\lambda \neq 0$ y

$$\lambda \neq \frac{1}{2}.$$

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$, donde X es una matriz de orden 2×2 .

b) Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2 .

septiembre 2007

Solución

a) $A \cdot X + X = B \Leftrightarrow (A + I)X = B \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1}B.$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; |A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1.$$

$$\text{Entonces } (A + I)^{-1} = \frac{1}{|A + I|} \left((A + I)^d \right)^t = \frac{1}{1} \left((A + I)^d \right)^t = \left((A + I)^d \right)^t.$$

$$\text{Pero } (A + I)^d = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left((A + I)^d \right)^t. \text{ Por tanto: } (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De este modo, la matriz } X \text{ es: } X = (A + I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Despejemos Y de la primera ecuación: $2X + 2Y = A \Leftrightarrow 2Y = A - 2X \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}(A - 2X)$ (*).

$$\text{Sustituymos en la 2ª y despejemos } X: 4X + 3 \cdot \frac{1}{2}(A - 2X) = B \Leftrightarrow 4X + \frac{3}{2}A - 3X = B \Leftrightarrow X = B - \frac{3}{2}A.$$

$$\text{Entonces tenemos que la matriz } X \text{ es: } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Y sustituyendo en (*): } Y = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Encuentra la expresión general de la potencia n -ésima de A . En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.
- Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

junio 2008

Solución

$$\text{a) } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Así sucesivamente es fácil darse cuenta de que

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } |A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow A^n \text{ tiene inversa para cualquier } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

En este caso $(A^n)^{-1} = \frac{1}{|A^n|} \left((A^n)^d \right)^t = \frac{1}{1} \left((A^n)^d \right)^t = \left((A^n)^d \right)^t$ y la matriz inversa de A^n coincide con la traspuesta

$$\text{de su adjunta: } (A^n)^{-1} = \left((A^n)^d \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Estudia, en función del parámetro λ , el rango de $A \cdot B$.
- Razona que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa.

reserva 1 – 2008

Solución

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es al menos dos, pues contiene por lo

menos un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$. Como $A \cdot B$ es cuadrada de orden 3, su rango será 3 cuando su determinante sea distinto de cero. En caso contrario su rango será 2. Pero

como $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda + 2 + \lambda) - 2 = 0$, entonces el rango de $A \cdot B$ es 2 sea quien sea el valor de

λ .

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. En este caso tenemos una matriz cuadrada de orden 2, cuyo

determinante es $|B \cdot A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3(\lambda+1) - (-3\lambda) = -3\lambda - 3 + 3\lambda = -3 \neq 0$. Esto quiere decir que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa sea quien sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para calcular la matriz inversa de $B \cdot A$ comenzaremos por calcular su adjunta y la traspuesta de su adjunta:

$$(B \cdot A)^d = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}, \quad ((B \cdot A)^d)^t = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & \lambda \\ -3 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces: } (B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{|B \cdot A|} ((B \cdot A)^d)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & \lambda \\ -3 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{3} \\ 1 & -\frac{\lambda+1}{3} \end{pmatrix}.$$

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula A^2 .

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{10} \cdot X = 3X + I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

reserva 2 – 2008

Solución

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = A$.

b) Del apartado anterior se deduce que $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$, $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$. Así podríamos seguir sucesivamente. Es decir, hemos demostrado que $A^n = A$ sea quien sea $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, en la ecuación matricial podemos sustituir A^{10} por A , quedando de la forma $6A \cdot X = 3X + I_3$.

Despejando X :

$$6AX = 3X + I_3 \Rightarrow 6AX - 3X = I_3 \Rightarrow (6A - 3I_3)X = I_3 \Rightarrow X = (6A - 3I_3)^{-1} I_3 \Rightarrow X = (6A - 3I_3)^{-1}$$

$$\text{Tenemos que } 6A - 3I_3 = 6 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $|6A - 3I_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 27 = -27$. Calculemos ahora su adjunta y la traspuesta de su

$$\text{adjunta: } (6A - 3I_3)^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left((6A - 3I_3)^d \right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (6A - 3I_3)^d. \text{ Finalmente:}$$

$$(6A - 3I_3)^{-1} = \frac{1}{|6A - 3I_3|} \left((6A - 3I_3)^d \right)^t = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$