

¿Cómo se suman y se restan fracciones?

Primero tienes que saber lo que son **fracciones equivalentes**. Se dice que dos fracciones son equivalentes cuando expresan la misma cantidad. Por ejemplo, $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ representan la misma cantidad: $2:4 = 4:8 = 0,5$. También podemos comprobar si dos fracciones son equivalentes cuando forman una **proporción**, es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Si se multiplica o divide el numerador y denominador de una fracción por una misma cantidad se obtiene una fracción equivalente a la dada.

Así, por ejemplo, si dividimos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{32}{24}$ entre 8 obtenemos la fracción $\frac{4}{3}$, que es equivalente a la primera. Este proceso se conoce con el nombre de **simplificación de fracciones**. Una fracción que no se puede simplificar se llama **fracción irreducible**. Si el número entre el que dividimos el numerador y el denominador es el máximo común divisor de ambos, entonces estaremos seguros de que la fracción que se obtiene es la irreducible.

Ejemplo 1:

$\frac{3}{5}$ y $\frac{18}{30}$ son fracciones equivalentes, es decir $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$, porque $3 \cdot 30 = 5 \cdot 18$ (el resultado de ambos productos es 90).

Ejemplo 2:

Para simplificar la fracción $\frac{228}{324}$ hasta obtener la fracción irreducible, dividimos el numerador y el denominador de la fracción entre el máximo común divisor de ambos. Como $\text{mcd}(228, 324) = 12$ (¡compruébalo!), tenemos:

$$\frac{228}{324} = \frac{228:12}{324:12} = \frac{19}{27}$$

Para **sumar o restar fracciones con el mismo denominador** se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador. Finalmente se simplifica la fracción resultante hasta obtener la fracción irreducible.

Ejemplo 3:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 4:

$$\frac{7}{6} - \frac{16}{6} = \frac{7-16}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

Para **sumar o restar fracciones con distinto denominador** se calculan fracciones equivalentes a cada una de ellas con el mismo denominador (esto se llama reducir a común denominador). El común denominador que se escoge es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores. Una vez hecho esto se procede como en el caso anterior. Al final, se simplifica el resultado.

Ejemplo 5:

$$\frac{7}{8} + \frac{4}{12} = [\text{reducimos a común denominador con el MCM de 8 y 12, que es 24}] = \frac{21}{24} + \frac{8}{24} = \frac{21+8}{24} = \frac{29}{24}$$

Ejemplo 6:

$$\frac{11}{18} - \frac{9}{20} = [\text{reducimos a común denominador con el MCM de 20 y 18, que es 180}] = \frac{110}{180} - \frac{81}{180} = \frac{110-81}{180} = \frac{29}{180}$$

También se pueden sumar o restar, simultáneamente, varias fracciones. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = [\text{el común denominador es } \text{mcm}(2,8,6,9) = 72] = \frac{36}{72} - \frac{27}{72} + \frac{60}{72} - \frac{32}{72} = \frac{36-27+60-32}{72} = \frac{37}{72}$$

¿Cómo se multiplican y se dividen fracciones?

Al igual que ocurría con los números enteros, el producto o multiplicación se notará con un punto ($\cdot$). A veces incluso no se pone nada. Para denotar la división se utilizan dos puntos ($:$). Recuerda que para multiplicar o dividir números enteros también hay que tener en cuenta las reglas de los signos que ya se vieron para el producto y la división de números enteros.

El **producto de dos fracciones** se hace en línea: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. **Ejemplo:** $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

La **división de dos fracciones** se efectúa en cruz: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. A veces la división no la denotaremos con dos puntos sino con

otra “raya de fracción”. Observa: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. **Ejemplo:** $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

Ambas operaciones con frecuencia aparecen mezcladas. En este caso se efectúan **de izquierda a derecha**.

Ejemplo 8:

$$\frac{1}{2} : \left(-\frac{4}{5} \right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{20}{24} = -\frac{5}{6}$$

[¡comprueba que si haces antes el producto no sale el mismo resultado!]

Ejemplo 9:

$$\left(-\frac{6}{5} \right) \cdot \frac{3}{2} : \frac{9}{10} = \left(-\frac{18}{10} \right) : \frac{9}{10} = -\frac{180}{90} = -2$$

Operaciones combinadas

Al igual que ocurría con los números enteros, las cuatro operaciones anteriores (suma, resta, multiplicación y división), aparecen combinadas. Para no equivocarte debes seguir siempre, y ordenadamente, esta **jerarquía**:

1. Corchetes y paréntesis.
2. Potencias, multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha).
3. Sumas y restas (también de izquierda a derecha).

¡IMPORTANTE! En muy conveniente fijarse en las fracciones que se obtienen en cada paso y simplificarlas en los pasos intermedios (no dejarlo para el final). Así, los cálculos serán más sencillos, pues se trabajará con números más pequeños.

Ejemplo 10:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2} \right) &= [\text{primero el paréntesis; además, como es posible, simplificamos}] = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{5}{10} \right) = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \\ &[\text{ahora la multiplicación}] = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = [\text{finalmente la resta; también simplificamos el resultado final}] = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{8}{20} - \frac{3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

¿Que las operaciones son un poco más largas? No pasa nada. Con paciencia y sin prisa, siguiendo la jerarquía, todo debe de salir bien. Insisto: no tengas prisa y acabarás antes. Observa atentamente el siguiente ejemplo, y convéncete de que entiendes todos y cada uno de los pasos.

Ejemplo 11:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left[\frac{3}{5} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] &= \\ = \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) \cdot \left[\frac{3}{5} - \left(\frac{10}{12} - \frac{9}{12} \right) : \left(\frac{8}{12} - \frac{3}{12} \right) \right] &= \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{12} : \frac{5}{12} \right] = \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{3}{5} - \frac{12}{60} \right] = \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right] = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$