1. Expresiones algebraicas

1.1. Definición de expresión algebraica

Una ***expresión algebraica*** es un conjunto de números y letras relacionados mediante las operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación y división). En una expresión algebraica también se puede hacer uso de los paréntesis y de las potencias. Las letras que más se usan al escribir una expresión algebraica son: a, b, c, d, x, y, z, t.

Las expresiones algebraicas se utilizan para expresar matemáticamente relaciones, propiedades o ciertas informaciones y poder operar con ellas.

Ejemplo 1:

Veamos cómo escribir mediante expresiones algebraicas algunas informaciones:

a) El doble de un número más ocho: $2x+8$.

b) La mitad de un número más el triple de otro número: $\frac{x}{2}+3y$.

c) El triple de la suma de dos números: $3(x+y)$.

d) La cuarta parte de la edad de Juan más 5 años: $\frac{x}{4}+5$.

e) La suma de los cuadrados de tres números: $x^2+y^2+z^2$.

f) El cuadrado de la suma de tres números: $(x+y+z)^2$.

g) La expresión algebraica para hallar el área de un triángulo es $A=\frac{b\cdot h}{2}$, donde A es el área, b la base y h la altura.

1.2. Valor numérico

El ***valor numérico*** de una expresión algebraica es el número que resulta de sustituir la o las letras por los números que se indiquen y realizar posteriormente las operaciones que aparecen en la expresión algebraica.

Es muy importante saber operaciones combinadas con enteros y fracciones para hallar valores numéricos.

Ejemplo 2:

a) Hallar el valor numérico de la expresión algebraica $2x-7$ para $x=-5$.

Sustituimos la letra x por -5 y hacemos las operaciones: $2\cdot(-5)-7=-10-7=-17$.

b) Calcular el valor numérico de la expresión algebraica $5a^2-3b$ para $a=-1$ y $b=-3$.

Sustituimos las letras a y b por -1 y -3 respectivamente, y hacemos las operaciones indicadas:

$$5\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)=5\cdot1-(-9)=5+9$$

c) Hallar el valor numérico de la expresión algebraica $2\cdot(x+2y)^2+\frac{y}{2}-4x+5$ para $x=3$, $y=-4$.

Sustituimos las letras x e y por 3 y -4 respectivamente, y hacemos las operaciones indicadas:

$$2\cdot(3+2\cdot(-4))^2+\frac{-4}{2}-4\cdot3+5=2\cdot(3-8)^2+(-2)-12+5=2\cdot(-5)^2-2-12+5=2\cdot25-2-12+5=$$
$$=50-2-12+5=41$$

d) Si tenemos un triángulo cuya base mide 12 cm y cuya altura mide $6,5$ centímetros, y queremos hallar su área, hemos de hallar el valor numérico de la expresión algebraica que proporciona el área de un triángulo (ver apartado g) del **Ejemplo 1**).

Por tanto, en este caso, el área es: $A=\frac{12\cdot6,5}{2}=\frac{78}{2}=39$ cm².

2. Monomios. Operaciones con monomios

2.1. Definición de monomio

Un ***monomio*** es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o varias letras (estas últimas estarán elevadas a exponentes naturales).

- Al número (con su signo) se le llama ***coeficiente*** del monomio.
- A las letras que acompañan al coeficiente (con sus exponentes), se le llama ***parte literal*** del monomio.
- A la suma de los exponentes de las letras que forman la parte literal, se le llama ***grado*** del monomio.

Las números también son monomios. No tienen parte literal y su grado es cero.

Ejemplo 3:

En la siguiente tabla vemos unos ejemplos de monomios en los que se identifican su coeficiente, y su parte literal y su grado:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$2a^3bc^2$	2	a^3bc^2	6
$-7xyz$	-7	xyz	3
$12pqr^2$	12	pqr^2	4
$-x$	-1	x	1
$-\frac{1}{2}a^2b^2c^3$	$-\frac{1}{2}$	$a^2b^2c^3$	7

La parte literal de un monomio es la misma si se cambian de orden las letras, pues el orden de los factores no altera el producto. Por ejemplo: $-3x^2y$, $2yx^2$ son dos monomios que tienen la misma parte literal, pues $x^2y = yx^2$. Observa también que los coeficientes 1 y -1 no se suelen escribir. Por ejemplo, escribiremos x^2, en vez de $1x^2$. Por último, un monomio con coeficiente cero es igual al número cero. Así pues, por ejemplo: $0x^2y^2z^3 = 0$.

2.2. Monomios semejantes. Suma y resta de monomios

Dos monomios son ***semejantes*** cuando tienen la misma parte literal, es decir, la mismas letras con los mismos exponentes.

Los monomios solo se pueden sumar y restar si son semejantes. El resultado de sumar o restar dos o más monomios semejantes es otro monomio cuyo coeficiente es la suma o resta de coeficientes, y que tiene la misma parte literal que los monomios originales. Si dos monomios no son semejantes no se pueden sumar o restar, de tal manera que la suma o la resta se deja indicada.

Ejemplo 4:

a) Los monomios $-3xy$, $6xy$ son semejantes pues tienen la misma parte literal. Por tanto se pueden sumar y restar:

$$-3xy + 6xy = (-3+6)xy = 3xy \; ; \; -3xy - 6xy = (-3-6)xy = -9xy$$

b) La operación $3a^2b - 6a^2b + 7a^2b - 5a^2b$ se puede efectuar porque esta formada por sumas y restas de monomios semejantes: $3a^2b - 6a^2b + 7a^2b - 5a^2b = (3-6+7-5)a^2b = -1a^2b = -a^2b$

c) Los monomios $2x^2$, $3x$, $5x^3$ no son semejantes. Entonces las sumas o restas que se hagan con ellos se dejan indicadas:

$$2x^2 + 3x - 5x^3 \; ; \; 2x^2 - 3x + 5x^3 \; ; \; 2x^2 + 3x + 5x^3 \; ; \; 2x^2 - 3x - 5x^3$$

d) En una expresión algebraica con varios monomios, solamente podremos reducir (sumar o restar) los que sean semejantes:

$$5y^2 - (8y - 7y^2) + 4y = 5y^2 - 8y + 7y^2 + 4y = 12y^2 - 4y$$

3. Igualdades, identidades y ecuaciones

3.1. Igualdad algebraica

Ya sabemos que una ***igualdad*** está formada por dos expresiones separadas por el signo igual ($=$). Si a ambos lados del signo igual aparecen números, tenemos una ***igualdad numérica***. Si en alguno de los dos lados del signo igual lo que hay es una expresión algebraica, se llama ***igualdad algebraica***.

Ejemplo 5:

a) $\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$ es una igualdad numérica.

b) $2a-5a+6a=3a$ es una igualdad algebraica.

c) $3x-12=-7x+8$ también es una igualdad algebraica.

3.2. Identidad

Una ***identidad*** es una igualdad algebraica que se verifica o es cierta para cualquiera valor que tomen las letras.

Ejemplo 6:

a) La igualdad algebraica del apartado b) del ejemplo anterior es una identidad.

b) Todas las propiedades de las operaciones son identidades algebraicas. Por ejemplo:

- $a+b=b+a$ (el orden de los sumandos no altera la suma).
- $ab=ba$ (el orden de los factores no altera el producto).
- $a(b+c)=ab+bc$ (propiedad distributiva).

c) $(1-x)\cdot(1+x)=1-x^2$ es una identidad. Podemos sustituir x por cualquier valor y veremos que lo que se obtiene a la izquierda es igual que lo que se obtiene a la derecha. Por ejemplo, si $x=3$, a la izquierda es $(1-3)\cdot(1+3)=-2\cdot 4=-8$ y a la derecha $1-3^2=1-9=-8$. Puedes probar con cualquier otro número para x. Siempre se cumplirá la igualdad.

3.2. Ecuación

Una ***ecuación*** es una igualdad algebraica que no es cierta para todos los valores que se den las letras, sino que se verifica solamente para ciertos valores de ellas.

En una ecuación a las letras se les llama ***incógnitas***. Llamaremos también ***miembros*** a cada una de las expresiones algebraicas que hay a cada lado de la igualdad, y ***términos*** a cada uno de los sumandos o monomios que forman los miembros. El ***grado*** de una ecuación es el del término o monomio de mayor grado. Una ***solución*** de una ecuación es un valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

Resolver una ecuación es encontrar el valor que ha de tomar la incógnita para que se cumpla la igualdad, es decir, resolver una ecuación es encontrar su solución. Al proceso mediante el cual se resuelve una ecuación se le suele llamar ***despejar la incógnita***. Nuestro objetivo será resolver ecuaciones de grado uno, o de primer grado.

Ejemplo 7:

La igualdad algebraica $3x-12=-7x+8$ (apartado c) del **Ejemplo 5**) es una ecuación, pues no se cumple para todos los valores que demos a las letras (por ejemplo, para $x=1$, a la izquierda sale -9 y a la derecha sale 1).

Su primer miembro es $3x-12$ y su segundo miembro es $-7x+8$.

Tiene cuatro términos, dos en el primer miembro ($3x$ y -12) y otros dos en el segundo ($-7x$ y 8).

La incógnita es la letra x. La ecuación es de grado uno, o de primer grado.

La solución es $x=2$, pues si sustituimos por este valor la igualdad es cierta. A la izquierda nos sale: $3\cdot 2-12=6-12=-6$ y a la derecha también nos aparece el mismo valor: $-7\cdot 2+8=-14+8=-6$.

4. Resolución de ecuaciones de primer grado

4.1. Ecuaciones equivalentes

Dos ***ecuaciones*** son ***equivalentes*** si tienen la misma solución.

Ejemplo 8:

Las ecuaciones $4x-3=5+2x$ y $5x-4=2x+8$ son equivalentes pues $x=4$ es la solución de ambas (¡compruébalo!).

4.2. Regla de la suma y del producto. Transposición de términos

Regla de la suma. Si en una ecuación se suma o se resta el mismo número o la misma expresión algebraica en los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

Regla del producto. Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número (distinto de cero), se obtienen una ecuación equivalente a la primera.

Para resolver una ecuación se utilizan las reglas anteriores. Normalmente procuraremos agrupar los términos con incógnita en el primer miembro y los términos numéricos en el segundo. Así se obtendrá una ecuación equivalente más sencilla que nos permita despejar la incógnita y, por tanto, la solución de la ecuación.

Ejemplo 9:

1. Resolvemos las dos ecuaciones del Ejemplo 8:
   - $4x-3=5+2x$. En primer lugar, restamos $2x$ en los dos miembros. De esta manera desaparece del segundo y aparece en el primer miembro restando: $4x-3-2x=5$. Ahora sumamos 3 en los dos miembros para que desaparezca del primer miembro y aparezca en el segundo miembro sumando: $4x-2x=5+3$. Reducimos términos semejantes y obtenemos una ecuación equivalente muy sencilla: $2x=8$. Finalmente dividimos ambos miembros entre 2. De esta manera la incógnita quedará despejada en el primer miembro y el 2 pasará dividiendo al segundo miembro: $\frac{2x}{2}=\frac{8}{2}\Rightarrow x=4$.
   - $5x-4=2x+8$. Podemos trasponer términos simultáneamente. Es decir, podemos restar $2x$ y sumar 4 en los dos miembros de la igualdad para obtener: $5x-2x=8+4$. Reduciendo términos semejantes: $3x=12$. Y dividiendo ambos miembros entre 3: $x=\frac{12}{3}\Rightarrow x=4$.
2. Si la ecuación es algo más complicada se aplican las mismas reglas las veces que sea necesario hasta despejar la incógnita. Por ejemplo, resolvamos la ecuación $9x-15-x+5=-4+4x+6$. Trasponiendo términos tenemos la ecuación equivalente: $9x-x-4x=-4+6+15-5$. Reduciendo términos semejantes: $4x=12$. Y, finalmente, dividiendo ambos miembros de la igualdad entre 4: $x=\frac{12}{4}\Rightarrow x=3$.

Puede ocurrir que la ecuación tenga paréntesis. Para resolver este tipo de ecuaciones hemos de eliminar los paréntesis antes de trasponer términos. Para eliminar los paréntesis se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o la resta. Hay que usar esta propiedad con cuidado haciendo uso adecuadamente de la regla de los signos. Lo mejor es verlo con un ejemplo.

Ejemplo 10:

Resolver la ecuación $2(x-3)-3(4-2x)=5-4(-3x+1)$. Eliminamos los paréntesis haciendo uso de la propiedad distributiva (¡ojo con los signos!): $2x-6-14+4x=5+12x-4$. Ahora trasponemos términos para dejar los términos con la incógnita en el primer miembro y los términos numéricos en el segundo: $2x+4x-12x=5-4+6+14$. Reducimos términos semejantes en ambos miembros: $-6x=21$. Ahora dividimos ambos miembros entre -6. $x=\frac{21}{-6}\Rightarrow x=-\frac{7}{2}$.

Observa que la solución puede ser una fracción. En este caso es obligatorio escribir su signo delante de la misma y simplificarla.

5. Resolución de ecuaciones con denominadores

Para resolver una ecuación con denominadores se siguen los siguientes pasos.

1. Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores que aparecen en la ecuación.
2. Eliminamos los denominadores. Para ello se multiplican todos los términos de la ecuación (en ambos miembros) por el mínimo común múltiplo calculado anteriormente.
3. Eliminamos los paréntesis.
4. Trasponemos términos, agrupando los términos con la incógnita en el primer miembro y los términos numéricos en el segundo miembro.
5. Reducimos términos semejantes.
6. Despejamos la incógnita dividiendo ambos miembros por el número adecuado en cada caso.

Ejemplo 11:

Resolver la ecuación $\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{9}{4}$. Lo haremos siguiendo los seis pasos mencionados anteriormente.

1. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 12.
2. Multiplicamos entonces por 12 todos los términos de la ecuación, tanto los del primer miembro como los del segundo: $12\cdot\dfrac{x+1}{6}-12\cdot\dfrac{x-4}{3}=12\cdot\dfrac{9}{4}$. Ahora eliminamos los denominadores; para ello hacemos primero las divisiones entre cada uno de los denominadores y el resultado lo multiplicamos por el numerador: $2(x+1)-4(x-4)=27$.
3. El paso siguiente es eliminar los paréntesis, tal y como se ha visto en el ejemplo anterior: $2x+2-4x+16=27$.
4. A continuación, trasponemos términos: los que tienen la incógnita en el primer miembro, y los numéricos en el segundo: $2x-4x=27-2-16$.
5. Reducimos términos semejantes: $-2x=9$.
6. Finalmente despejamos la incógnita dividiendo ambos miembros entre -2: $x=\dfrac{9}{-2}=-\dfrac{9}{2}$.

Ejemplo 12:

Resolver la ecuación $\dfrac{5-x}{2}-2=\dfrac{1-x}{2}-\dfrac{2(x+1)}{3}$.

1. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6.
2. Multiplicamos entonces por 6 todos los términos de la ecuación, tanto los del primer miembro como los del segundo: $6\cdot\dfrac{5-x}{2}-6\cdot 2=6\cdot\dfrac{1-x}{2}-6\cdot\dfrac{2(x+1)}{3}$. Ahora eliminamos los denominadores. Hacemos primero las divisiones entre cada uno de los denominadores y el resultado lo multiplicamos por el numerador: $3(5-x)-12=3(1-x)-4(x+1)$.
3. Eliminamos los paréntesis: $15-3x-12=3-3x-4x-4$.
4. A continuación, trasponemos términos: los que tienen la incógnita en el primer miembro, y los numéricos en el segundo: $-3x+3x+4x=3-4-15+12$.
5. Reducimos términos semejantes: $4x=-4$.
6. Finalmente despejamos la incógnita dividiendo ambos miembros entre 4: $x=\dfrac{-4}{4}\Rightarrow x=-1$.

6. Resolución de problemas usando ecuaciones

El álgebra es un instrumento muy potente para resolver problemas de la vida real. Aunque no existe una "receta mágica" para resolver problemas, sí vamos a sugerir unas técnicas y etapas para enfrentarnos a los problemas por difíciles que estos sean.

1. **Comprender el problema**: identificar los datos y las incógnitas y buscar sus relaciones.
2. **Trazar un plan para resolverlo**: plantear la ecuación o ecuaciones que permitan resolver el problema. Esta etapa es fundamental, pues hemos de traducir los datos del problema a lenguaje algebraico.
3. **Poner en práctica el plan**: resolver la ecuación o ecuaciones planteadas.
4. **Comprobar los resultados**: comprobar si la solución tiene sentido en el contexto particular del problema.

Ejemplo 13:

José y sus amigos fueron de excursión. El primer día anduvieron 5 km más que el segundo, y el tercero, el doble que el primer día. En total han recorrido 59 km. Calcula qué distancia han recorrido cada día.

Solución.

Para que todo funcione bien llamaremos x a los kilómetros que recorrieron el segundo día. Como el primer día anduvieron 5 km más que el segundo, el primer día anduvieron $x+5$ kilómetros. Además, el tercer día recorrieron el doble que el primer día, es decir, el tercer día recorrieron $2(x+5)$ kilómetros.

Ahora planteamos la ecuación: la suma de lo que recorrieron el primer, el segundo y el tercer día es igual a 59 km. Por tanto:

$$x+5+x+2(x+5)=59$$

Resolvemos la ecuación anterior:

$$x+5+x+2x+10=59 \Rightarrow x+x+2x=59-5-10 \Rightarrow 4x=44 \Rightarrow x=\frac{44}{4} \Rightarrow x=11.$$

Por tanto, el primer día recorrieron $x+5=11+5=16$ km; el segundo día recorrieron $x=11$ km; y, finalmente, el tercer día anduvieron $2(x+5)=2(11+5)=2\cdot 16=32$ km.

Ejemplo 14:

Un examen de matemáticas consta de diez cuestiones. Por cada una bien resuelta te dan 10 puntos y por cada una mal te quitan 3 puntos. Si Ana contestó a todas las cuestiones y obtuvo 61 puntos, ¿qué cantidad de respuestas correctas obtuvo?

Solución.

Llamemos x a la cantidad de respuestas correctas que obtuvo Ana. Esto quiere decir que el número de respuestas incorrectas fue $10-x$. Los puntos sumados por las respuestas correctas son $10x$, y los puntos quitados por las incorrectas serán igual a $3(10-x)$. Como Ana obtuvo 61 puntos, podemos plantear la siguiente ecuación (puntos sumados menos puntos quitados igual a 61):

$$10x-3(10-x)=61$$

Resolvemos la ecuación anterior:

$$10x-30+3x=61 \Rightarrow 10x+3x=61+30 \Rightarrow 13x=91 \Rightarrow x=\frac{91}{13} \Rightarrow x=7.$$

Por tanto, Ana obtuvo 7 respuestas correctas.