1. Razón y proporción

1.1. Razón numérica

Una ***razón*** entre dos números a y b es el cociente $\frac{a}{b}$. Es importante saber que:

- Una razón no tiene unidades.
- Los números a y b que forman una razón pueden ser enteros o decimales.

Ejemplo 1:

a) El lado de un triángulo mide 50 cm y la altura correspondiente a ese lado mide 20 cm. La razón entre el lado y su altura es $\frac{50}{20}=2,5$. Esta razón viene a decir que el lado es $2,5$ veces su altura.

b) Una famosa razón es la que existe entre la longitud l de una circunferencia y su diámetro d: el número π. O sea, que dada una circunferencia cualquiera, la razón de l a d siempre es igual al número π: $\frac{l}{d}=\pi$. Como el diámetro es el doble del radio r, también podemos escribir $\frac{l}{2r}=\pi$, y de aquí se obtiene la fórmula de la longitud de la circunferencia: $l=2\pi r$.

1.2. Proporción numérica

Una ***proporción*** es una igualdad entre dos razones:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

La proporción anterior se lee de la siguiente manera: "a es a b como c es a d". Como se puede apreciar, la proporción está formada por cuatros términos: a y d, que se llaman ***extremos***; b y c, que se llaman ***medios***.

<u>Propiedad fundamental de las proporciones</u>: dos razones forman una proporción si el producto de extremos es igual al producto de medios:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$$

Ejemplo 2:

a) Las razones $\frac{5}{14}$ y $\frac{8}{22,4}$ forman una proporción ya que $5\cdot 22,4=112=14\cdot 8$. Por tanto $\frac{5}{14}=\frac{8}{22,4}$.

b) Las razones $\frac{17}{3}$ y $\frac{51}{8}$ no forman proporción ya que $17\cdot 8=136\neq 153=3\cdot 51$. Por tanto $\frac{17}{3}\neq\frac{51}{8}$

Si en una proporción conocemos tres de los cuatro términos podemos calcular el cuarto aplicando la propiedad anterior.

Ejemplo 3:

Para calcular el valor de x en la proporción $\frac{8}{x}=\frac{10}{27}$, aplicamos la propiedad anterior. Entonces:

$$8\cdot 27=x\cdot 10\Rightarrow 216=10x$$

Ahora necesitamos encontrar un número x que multiplicado por 10 dé 216. Este número es, obviamente, $x=\frac{216}{10}=21,6$.

Por regla general para encontrar el término desconocido de una proporción, multiplicamos en cruz los términos conocidos y dividimos por el tercer término conocido.

2. Magnitudes directamente proporcionales

2.1. Proporcionalidad directa

Recordemos en primer lugar que, desde el punto de vista físico, una ***magnitud*** es aquella propiedad de un cuerpo, sustancia o fenómeno físico susceptible de ser medible o cuantificable.

Se dice que dos cantidades o dos magnitudes son ***directamente proporcionales*** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número distinto de cero, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número.

Ejemplo 4:

Supongamos un objeto en movimiento con velocidad constante que recorre las siguientes distancias (en metros), en los tiempos (en segundos) dados por la siguiente tabla:

Distancia (m)	15	30	45	60	…	90	…	225
Tiempo (s)	3	6	9	12	…	18	…	45

Observa que, al multiplicar el tiempo por un número, la distancia queda multiplicada por ese mismo número. Todas las razones de la distancia al tiempo son iguales entre sí, es decir, dos razones cualesquiera entre la distancia y el tiempo, forman una proporción:

$$\frac{15}{3}=\frac{30}{6}=\frac{45}{9}=\frac{60}{12}=\frac{90}{18}=\frac{225}{45}$$

Se llama ***constante de proporcionalidad*** al cociente de cualquiera de las razones de dos cantidades directamente proporcionales.

Ejemplo 5:

La constante de proporcionalidad del ejemplo anterior es $\frac{15}{3}=\frac{5}{1}=5$.

La magnitud que expresa la distancia recorrida por un objeto por unidad de tiempo se conoce con el nombre de velocidad. En nuestro caso, la constante de proporcionalidad expresa la velocidad del objeto, el cual se mueve a una velocidad de 5 metros por segundo, y se escribe así: $5\ \mathrm{m/s}$.

2.2. Reducción a la unidad

Para reducir a la unidad se asigna a una de las magnitudes la unidad (el número 1) y se calcula el valor correspondiente de la otra. Para conocer otro par de valores basta con multiplicar por el número indicado. Es mejor verlo con un ejemplo.

Ejemplo 6:

Supongamos que 4 kilos de manzanas cuestan $4,60$ €, y queremos saber lo que cuestan 17 kilos.

Podemos establecer la siguiente proporción $\frac{4}{4,60}=\frac{1}{x}$ para saber lo que cuesta un kilo de manzanas. Es fácil obtener ahora que $x=\frac{4,60\cdot 1}{4}=\frac{4,60}{4}=1,15$, es decir, un kilo de manzanas cuesta $1,15$ €.

Por tanto 17 kilos costarán $17\cdot 1,15=19,55$ €

3. Problemas de proporcionalidad

3.1. Regla de tres simple directa

A partir de tres términos de una proporción, se puede calcular el cuarto aplicando la propiedad fundamental de las proporciones. Esta técnica se conoce con el nombre de ***regla de tres*** simple directa.

Ejemplo 7:

El anterior ejemplo lo podríamos haber resuelto así: $\dfrac{4}{4,60}=\dfrac{17}{x}\Rightarrow x=\dfrac{4,60\cdot 17}{4}=\dfrac{78,2}{4}=19,55$ €.

Habitualmente se sitúan los valores de una de las magnitudes en una columna y los valores de la otra magnitud en una segunda columna, de tal manera que las cantidades, de arriba hacia abajo, formen una proporción.

Magnitud A		Magnitud B
a	———	b
a'	———	b'

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

Ejemplo 8:

Una rueda gira 1500 veces en 10 minutos ¿Cuántas vueltas dará en 7 minutos?

Vueltas		Minutos
1500	———	10
x	———	7

$$\frac{1500}{x}=\frac{10}{7}\Rightarrow x=\frac{1500\cdot 7}{10}=\frac{10500}{10}\Rightarrow x=1050 \text{ vueltas.}$$

Por supuesto, para hacer problemas de proporcionalidad directa hemos de comprobar previamente que las magnitudes son directamente proporcionales. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 9:

Un coche gasta $6,4$ litros de gasolina cada 100 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer si sólo le quedan $1,6$ litros en el depósito? ¿Cuántos litros de gasolina gastará en 425 kilómetros?

Litros		Kilómetros
$6,4$	———	100
$1,6$	———	x

$$\frac{6,4}{1,6}=\frac{100}{x}\Rightarrow x=\frac{1,6\cdot 100}{6,4}=\frac{160}{6,4}\Rightarrow x=25 \text{ kilómetros.}$$

Litros		Kilómetros
$6,4$	———	100
x	———	425

$$\frac{6,4}{x}=\frac{100}{425}\Rightarrow x=\frac{6,4\cdot 425}{100}=\frac{2720}{100}\Rightarrow x=27,2 \text{ litros.}$$

4. Porcentajes

Un ***porcentaje***, o ***tanto por ciento***, es una razón con denominador 100, es decir, una razón de proporcionalidad referida a 100 unidades. Un porcentaje se expresa con el símbolo $\%$. El porcentaje $k\%$ de una cantidad c se calcula multiplicando el porcentaje por la cantidad y dividiendo entre 100.

$$k\% \text{ de } c = \frac{k \cdot c}{100}$$

Todo porcentaje $k\%$ lleva asociado un número decimal que resulta de dividir el porcentaje entre 100. Así por ejemplo el número decimal asociado al porcentaje del 25% es $\frac{25}{100} = 0,25$.

Ejemplo 10:

Unos zapatos que cuestan 95€ están rebajados un 30%. ¿Cuánto dinero nos descuentan? ¿Cuánto cuestan los zapatos ya rebajados?

El 30% de 95 es $\frac{30 \cdot 95}{100} = \frac{2850}{100} = 28,5$. Por tanto nos descuenta $28,5$€.

Los zapatos ya rebajados cuestan $95 - 28,5 = 66,5$ €.

También se puede calcular el 30% de 95 multiplicando directamente por el número decimal asociado al porcentaje, es decir, 30% de $95 = 0,3 \cdot 95 = 28,5$.

Observemos que al realizar el $k\%$ de una cantidad total c, obtenemos como resultado el porcentaje correspondiente x, llamada parte.

$$k\% \text{ de } c = x \Rightarrow \frac{k \cdot c}{100} = x$$

Por tanto hay involucradas cuatro cantidades: k, 100, c y x, formando la siguiente proporción: "k es a 100 como la parte x es a la cantidad total c":

$$\frac{k}{100} = \frac{x}{c}$$

Por eso, al hacer problemas de porcentajes se puede establecer una proporción o una regla de tres para calcular cualquiera de las cantidades desconocidas que pueden ser el porcentaje k, la cantidad total c, o la parte x.

Ejemplo 11:

Me han hecho un descuento de 10€ en unos pantalones que estaban rebajados un 20%. ¿Cuánto costaban los pantalones? ¿Cuánto he pagado por ellos?

En este caso conocemos el porcentaje y la parte. Por tanto $\frac{20}{100} = \frac{10}{c} \Rightarrow c = \frac{100 \cdot 10}{20} = \frac{1000}{20} \Rightarrow c = 50$ € costaban los pantalones. Por tanto he pagado por ellos $50 - 10 = 40$ €.

Ejemplo 12:

Ha aparecido en el periódico esta noticia: "*de cada diez perros adoptados, dos acaban siendo abandonados por sus dueños*". Calcula el porcentaje de perros que son abandonados.

En este caso conocemos la cantidad total y la parte. Por tanto $\frac{k}{100} = \frac{2}{10} \Rightarrow k = \frac{100 \cdot 2}{10} = \frac{200}{10} \Rightarrow k = 20$. Por tanto el porcentaje de perros que son abandonados es el 20%.

5. Aumentos y disminuciones porcentuales

Los porcentajes indican muchas veces cuánto hay que aumentar o disminuir una cantidad dada. Un ejemplo es el IVA o impuesto sobre el valor añadido, que es un porcentaje que se añade al precio de compra de un artículo.

Ejemplo 13:

En una tienda de electrodomésticos el precio de un televisor es de 450 €, y el IVA es del 21%. ¿Cuánto hay que pagar en realidad por el televisor?

Habrá que pagar 450 € más el IVA. Como 21% de $450=\frac{21\cdot 450}{100}=\frac{9450}{100}=94,50$ €, habrá que pagar por el televisor $450+94,50=544,50$ €.

Tal y como su nombre indica, el IVA añade un porcentaje sobre el precio total. Es decir, si el IVA es del 21% no pagamos el 100% del producto, sino el 121%. El número decimal asociad a este porcentaje es $\frac{121}{100}=1,21$. Cuando se trata de hacer un aumento porcentual podemos obtener la cantidad final multiplicando por este número decimal. En nuestro caso tenemos: $450\cdot 1,21=544,5$ €. Observa cómo, con una única operación, podemos obtener la solución del problema.

En vez de un aumento se puede producir una disminución, como cuando hay rebajas. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 14:

En un concesionario han rebajado cierto modelo de automóvil en un 20%. Si su precio inicial era de 16500 €, ¿cuál es el precio del automóvil rebajado?

El precio del automóvil ya rebajado será 16500 menos la rebaja del 20%. Pero 20% de $16500=\frac{20\cdot 16500}{100}=3300$ €.

Por tanto $16500-3300=13200$ € es e precio rebajado del automóvil.

También, como en el problema anterior, podríamos hacerlo con una sola operación, pero como ahora se trata de una rebaja, pagamos el 80% del precio del automóvil. Por tanto, el precio rebajado es $16500\cdot 0,8=13200$ €.

A veces nos dan una cantidad añadida tras haber efectuado un aumento porcentual y nos piden la cantidad inicial.

Ejemplo 15:

Un taller mecánico nos presenta, por el arreglo de un vehículo, una factura de $907,5$ euros, factura que incluye un 21% de IVA. ¿Cuál es el importe de la factura sin el IVA?

En este caso el 121% se corresponde con los $907,5$ euros. Por tanto:

$$\frac{121}{907,5}=\frac{100}{x}\Rightarrow x=\frac{907,5\cdot 100}{121}=\frac{90750}{121}\Rightarrow x=750$$

Es decir, el importe de la factura sin IVA es 750 €.

Un error muy frecuente es hacer este problema según la siguiente operación:

$$907,5-21\% \text{ de } 907,5=907,5-\frac{21\cdot 907,5}{100}=907,5-190,575=716,925 \text{ €}$$

Si el taller nos ofrece la posibilidad de pagar sin IVA no podemos pretender realizar un pago de unos 717 euros. En realidad, hemos de pagar 750. Esto es fuente de conflicto, pero para ver que la cantidad 717 euros no es la correcta basta aumentarla un 21% y ver que no se corresponde con los $907,5$ euros de la factura inicial, la cual incluía el IVA. De hecho:

$$700+21\% \text{ de } 717=717\cdot 1,21=867,57$$