Múltiplo y divisor

Si al dividir un número natural a entre otro número natural b se obtiene resto igual a cero, se dice que la división ***exacta***. En estos casos podemos afirmar que:

a es ***divisible*** por b	a es ***múltiplo*** de b	b es ***divisor*** (o ***factor***) de a

El número 0 recibe el nombre de ***elemento neutro*** y es múltiplo de cualquier número natural. El número 1 recibe el nombre de ***elemento unidad*** y es divisor de cualquier número natural. Además, todo número natural es múltiplo y divisor de sí mismo.

El conjunto formado por todos los múltiplos de un número natural a se obtiene multiplicando dicho número por los sucesivos números naturales.

Ejemplo 1:

12 es un múltiplo de 3 porque al dividir 12 entre 3 se obtiene 4 de cociente y 0 de resto. Es decir:

$$12=3\cdot 4$$

Observa que, en este caso, 12 también es un múltiplo de 4. Además 3 y 4 son ambos divisores de 12.

Ejemplo 2:

El conjunto ordenado de todos los números naturales múltiplos de 3 es

$$\{3\,,6\,,9\,,12\,,15\,,18\,,21\,,24\,,27\,,30\,,\ldots\}$$

Observa que lo que hemos hecho es multiplicar por 3 todos los número naturales.

Números primos

Un número natural es ***primo*** cuando es mayor que 1 y sus únicos divisores son él mismo y la unidad. El único número primo par es el 2. Los demás números primos son impares (si hubiera algún primo par mayor que 2 tendría como divisor al 2 y no se cumpliría la definición de número primo). De todas formas, también hay muchos números impares que no son primos, por ejemplo el 9 o el 91. Un número que no es primo recibe el nombre de ***compuesto***.

Ejemplo 3:

El conjunto de los números primos menores que 100 es:

$$\{2\,,3\,,5\,,7\,,11\,,13\,,17\,,19\,,23\,,29\,,31\,,37\,,41\,,43\,,47\,,53\,,59\,,61\,,67\,,71\,,73\,,79\,,83\,,89\,,97\}$$

Criterios de divisibilidad

Los ***criterios de divisibilidad*** son reglas que nos permiten reconocer, sin necesidad de realizar la división, si un número es divisible por otro. En la siguiente tabla tienes los criterios de divisibilidad para 2, 3, 5, 10 y 11:

Divisible por	Regla
2	Si la última cifra es 0 o par.
3	Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
10	Si la última cifra es 0.
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo 4:

El número natural 2541 no es divisible por 2 porque no termina en cero ni en cifra par. Sin embargo sí que es divisible por 3 porque $2+5+4+1=12$, que es un múltiplo de tres. No es divisible por 5 porque no termina ni en 0 ni en 5. Tampoco es divisible por 10 (no acaba en cero). Sí que es divisible por 11 porque $(2+4)-(5+1)=0$.

Descomposición de un número natural en producto de factores primos o factorización

Un número natural se puede expresar de forma única como producto de números primos. A esta expresión se le llama ***descomposición en producto de factores primos*** del número o, simplemente, ***factorización***. Habitualmente se agrupan los factores primos iguales escribiéndolos en forma de potencia. El proceso para obtener la factorización de un número natural se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5:

Para factorizar el número 360 vamos dividiendo entre sus factores primos (de menor a mayor) hasta obtener como cociente la unidad.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces: $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Ejemplo 6:

Para factorizar el número 756 se procede como en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto: $756 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

El ***máximo común divisor*** de varios números a, b, c,... es el mayor de sus divisores comunes, y se escribe así:

$$\text{mcd}(a,\ b,\ c,\ldots)$$

Para calcular el máximo común divisor de varios números naturales se factorizan estos, y se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor de los exponentes con el que aparece.

El ***mínimo común múltiplo*** de varios números a, b, c,... es el menor de sus múltiplos comunes, y se escribe así:

$$\text{mcm}(a,\ b,\ c,\ldots)$$

Para calcular el mínimo común múltiplo de varios números naturales se factorizan estos, y se toman todos los factores primos, comunes y no comunes, elevado cada uno al mayor de los exponentes con el que aparece.

Ejemplo 6:

Para hallar el máximo común divisor de 90 y 420 factorizamos ambos números:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \ \ ; \ \ 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Ahora tomamos solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor de los exponentes con el que aparece:

$$\text{mcd}(180,\ 420) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Ejemplo 7:

Para hallar el mínimo común múltiplo de 45 y 60 factorizamos ambos números:

$$45 = 3^2 \cdot 5 \ \ ; \ \ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ahora tomamos los factores primos, comunes y no comunes, elevados cada uno al mayor de los exponentes con el que aparece:

$$\text{mcm}(45,\ 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Ejemplo 8 (problema resuelto):

En una fábrica se oye el escape de una válvula de gas cada 45 segundos, y el golpe de un martillo pilón, cada 60 segundos. Si se acaban de oír ambos sonidos simultáneamente, ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?

Solución:

El tiempo que ha de transcurrir para que coincidan ambos sonidos ha de ser un múltiplo común de 45 y 60. Además tiene que ser el mínimo de ellos. Como $\text{mcm}(45,\ 60) = 180$, ambos sonidos tardarán 180 segundos (3 minutos) en coincidir de nuevo.