Derivadas

Definición de derivada en un punto

Sea $a \in \operatorname{Dom} f$. Entonces $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Recta tangente en un punto

La ***recta tangente*** a una curva $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ viene dada por la fórmula:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Aplicaciones de las derivadas: monotonía y extremos

- Si $f'(x) > 0$ en todo punto x de un intervalo, entonces f es ***creciente*** en ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ en todo punto x de un intervalo, entonces f es ***decreciente*** en ese intervalo.
- Si $a \in \operatorname{Dom} f$ es un punto donde la función es continua y, además, es un ***máximo o mínimo (extremo) relativo***, entonces $f'(a) = 0$. Además: si $f''(a) > 0$, entonces a es un ***mínimo relativo***; y si $f''(a) < 0$, entonces a es ***un máximo relativo***.

Aplicaciones de las derivadas: curvatura y puntos de inflexión

- Si $f''(x) > 0$ en todo punto x de un intervalo, entonces f es ***cóncava*** en ese intervalo.
- Si $f''(x) < 0$ en todo punto x de un intervalo, entonces f es ***convexa*** en ese intervalo.
- Si $a \in \operatorname{Dom} f$ es un ***punto de inflexión***, entonces $f''(a) = 0$.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces a es ***un punto de inflexión***.

Cálculo de límites

- ***Regla de L'Hôpital***. Si al intentar hacer el siguiente límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde a puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$, aparece la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
- ***Resolución de la indeterminación*** 1^∞. Si al intentar hacer el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$, donde a puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$, aparece la indeterminación 1^∞, entonces si se tiene que $\lim\limits_{x \to a} \left[g(x)\left(f(x) - 1\right) \right] = L$, se puede afirmar que $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^L$.

Si a todo lo anterior le añadimos que tenemos control con las ***reglas básicas para el cálculo de límites*** (página 2 de estos apuntes), así como destreza en el cálculo de derivadas, es decir, se dominan la ***tabla de derivadas*** y las ***reglas de derivación*** (páginas 3 y 4 de estos apuntes), podremos resolver casi cualquier tipo de límite y casi cualquier ejercicio o problema relacionado con las derivadas (como los ***problemas de optimización***). Ver ejercicios propuestos y resueltos en este enlace EvAU.