1. Clasifica cada número en el conjunto "más pequeño" al que pertenezca ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, o a ninguno de ellos). Razona tu respuesta en aquellos casos que sea necesario.

   a) $7,2343$; b) $\sqrt[4]{16}$; c) $-\dfrac{42}{14}$; d) $-12,10110011100011110000\ldots$; e) $\sqrt{625}$; f) $\sqrt[5]{-5}$; g) $\dfrac{4}{12}$; h) 5 ; i) -7 ; j) $0,23$; k) $\dfrac{5}{4}$; l) $\sqrt{\dfrac{18}{2}}$; m) $-\sqrt{3}$; n) $\sqrt[3]{-5}$; ñ) $\dfrac{\pi}{2}$; o) $4,\widehat{7}$; p) $\sqrt{-4}$; q) $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$; r) $\log_7 343$; s) $81^{\frac{1}{4}}$; t) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

2. Supongamos a, b, c, d números reales cumpliendo que $b\neq 0$, $d\neq 0$, $b\neq -d$, $c\neq d$ (esto es para asegurar que los denominadores no se anulan). Suponiendo que $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, prueba que son ciertas las siguientes igualdades:

   a) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$; b) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$; c) $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{b}{d}$

3. Expresa como fracción cada decimal y realiza posteriormente la operación:

   $$0,12-5,\widehat{6}-0,2\widehat{3}+3,1$$

4. ¿Es verdadero o falso que $12,\widehat{9}=13$? Justifica tu respuesta.

5. Comprueba que el producto $4,0\widehat{9}\cdot 1,3\widehat{9}$ es un decimal exacto.

6. Calcula: a) $\sqrt{1,\widehat{7}}$; b) $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}}$

7. Si $n\neq 0$ es un número natural, determina para qué valores de n estos números pertenecen a $\mathbb{Z}$:

   a) $\dfrac{n}{2}$; b) $\dfrac{3}{n}$; c) $n-5$; d) $n+\dfrac{1}{2}$; e) $\sqrt{n}$

8. Si $n\in\mathbb{N}$ y $n>1$, ordena de menor a mayor los siguientes números:

   $$\frac{1}{n+1}\ ,\ n\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ -\frac{1}{n}\ ,\ \frac{1}{-n-1}$$

9. Sea a un número real. Ordena de menor a mayor los números a, a^2, $\dfrac{1}{a}$ y $\sqrt{a}$ en los dos casos siguientes:

   a) Si $a>1$; b) Si $0<a<1$

10. Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 20 cm de diámetro. ¿El resultado es un número racional o irracional?

11. Calcula la altura y el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 1 m. ¿Ambos números son racionales o irracionales?

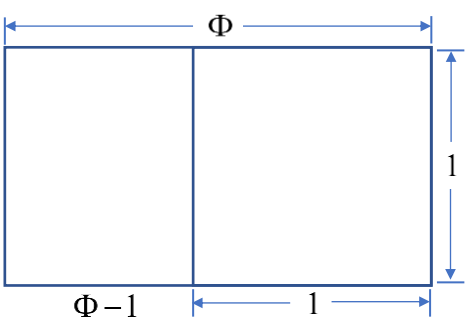
12. Expresa los siguientes conjuntos mediante intervalos:

    a) $\{x\in\mathbb{R}:-2<x\leq 8\}$; b) $\{x\in\mathbb{R}:4\leq x\leq 12\}$; c) $\{x\in\mathbb{R}:1<x\}$; d) $\{x\in\mathbb{R}:x\leq 5\}$; e) $\left\{x\in\mathbb{R}:x>\dfrac{1}{2}\right\}$

13. Representa gráficamente los siguientes conjuntos y expresa también el resultado en forma de intervalo:

    a) $(0,4)\cup(-1,3]$; b) $(5,+\infty)\cap(4,7)$; c) $(-4,8)\cap(1,+\infty)$;
    d) $(-\infty,6]\cap(-2,8]$; e) $[-1,1)\cup(0,3]$

14. Obtén el valor exacto de Φ, teniendo en cuenta que el rectángulo de dimensiones $\Phi:1$ es semejante al rectángulo que resulta de suprimirle al rectángulo anterior un cuadrado de lado 1, tal y como se indica en la figura de la derecha. Recuerda que dos figuras son semejantes cuando lados homólogos son proporcionales. Al número Φ se le llama *número de oro*, *razón áurea* o *divina proporción*.



Soluciones

1. Clasifica cada número en el conjunto "más pequeño" al que pertenezca ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, o a ninguno de ellos). Razona tu respuesta en aquellos casos que sea necesario.

   a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{N}$; c) $\mathbb{Z}$; d) A ninguno de ellos, es irracional ; e) $\mathbb{N}$; f) A ninguno de ellos, es irracional ; g) $\mathbb{Q}$; h) $\mathbb{N}$; i) $\mathbb{Z}$; j) $\mathbb{Q}$; k) $\mathbb{Q}$; l) $\mathbb{N}$; m) A ninguno de ellos, es irracional ; n) A ninguno de ellos, es irracional ; ñ) A ninguno de ellos, es irracional ; o) $\mathbb{Q}$; p) No es un número real pues no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -4 ; q) $\mathbb{Q}$; r) $\mathbb{N}$; s) $\mathbb{N}$; t) $\mathbb{N}$.

2. Supongamos a, b, c, d números reales cumpliendo que $b\neq 0$, $d\neq 0$, $b\neq -d$, $c\neq d$ (esto es para asegurar que los denominadores no se anulan). Suponiendo que $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, prueba que son ciertas las siguientes igualdades:

   a) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow ad+dc=bc+dc\Rightarrow (a+c)d=(b+d)c\Rightarrow \dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$.

   b) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow ad+bd=bc+bd\Rightarrow (a+b)d=(c+d)d\Rightarrow \dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$.

   c) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow ad-bd=bc-bd\Rightarrow (a-b)d=(c-d)b\Rightarrow \dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{b}{d}$.

3. Expresa como fracción cada decimal y realiza posteriormente la operación:

$$0{,}12-5{,}\widehat{6}-0{,}2\widehat{3}+3{,}1$$

$$0{,}12-5{,}\widehat{6}-0{,}2\widehat{3}+3{,}1=\frac{12}{100}-\frac{51}{9}-\frac{21}{90}+\frac{31}{10}=\frac{3}{25}-\frac{17}{3}-\frac{7}{30}+\frac{31}{10}=\frac{18-850-35+465}{150}=\frac{-402}{150}=-\frac{67}{25}.$$

4. ¿Es verdadero o falso que $12{,}\widehat{9}=13$? Justifica tu respuesta.

   Es verdadero. Si llamamos $x=12{,}\widehat{9}$, entonces $10x=129{,}\widehat{9}$, con lo que:

   $$10x-x=129{,}\widehat{9}-12{,}\widehat{9}\Rightarrow 9x=117\Rightarrow x=\frac{117}{9}=13.$$

5. Comprueba que el producto $4{,}0\widehat{9}\cdot 1{,}3\widehat{9}$ es un decimal exacto.

   $4{,}0\widehat{9}=\dfrac{409-40}{90}=\dfrac{369}{90}=\dfrac{41}{10}=4{,}1$ (se podría probar de manera similar a como se ha hecho en el ejercicio anterior). De manera similar se obtiene que $1{,}3\widehat{9}=1{,}4$. Por tanto: $4{,}0\widehat{9}\cdot 1{,}3\widehat{9}=4{,}1\cdot 1{,}4=5{,}74$ (decimal exacto).

6. Calcula: a) $\sqrt{1{,}\widehat{7}}$; b) $\sqrt{\dfrac{1{,}\widehat{3}}{3}}$

   a) $\sqrt{1{,}\widehat{7}}=\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$; b) $\sqrt{\dfrac{1{,}\widehat{3}}{3}}=\sqrt{\dfrac{12/9}{3}}=\sqrt{\dfrac{12}{27}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$

7. Si $n\neq 0$ es un número natural, determina para qué valores de n estos números pertenecen a $\mathbb{Z}$:

   a) $\dfrac{n}{2}$; b) $\dfrac{3}{n}$; c) $n-5$; d) $n+\dfrac{1}{2}$; e) $\sqrt{n}$

   a) Para que $\dfrac{n}{2}$ pertenezca al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, n ha de ser un natural par, es decir, n ha de ser de la forma $n=2k$ donde $k\in\mathbb{N}$. De este modo, $\dfrac{n}{2}=\dfrac{2k}{2}=k\in\mathbb{N}$.

b) Para que $\frac{3}{n}$ pertenezca a $\mathbb{Z}$, n ha de ser o bien 1, o bien 3. Pues $\frac{3}{1}=3$ y $\frac{3}{3}=1$. Si $n=2$, $\frac{3}{2}=1{,}5$, que no es entero. Y si $n>3$, la fracción $\frac{3}{n}$ tendrá el denominador mayor que el numerador. Esto significa que el número estará estrictamente comprendido entre 0 y 1, con lo que el resultado no será un número entero.

c) Es obvio que para cualquier natural n, $n-5$ es un número entero.

d) Si n es un número natural, $n+\frac{1}{2}$ no podrá ser entero nunca (si sumamos $0{,}5$ a un natural el resultado será siempre decimal exacto y, por tanto, racional). Una demostración de este hecho se podría hacer del siguiente modo: $n+\frac{1}{2}=\frac{2n+1}{2}$. Si n es un natural $2n+1$ será un natural impar que, al dividirlo entre 2, no dará lugar a una división exacta.

e) $\sqrt{n}$ será entero si, y solo si, n es un cuadrado perfecto, ya que en ese caso $\sqrt{n}=\sqrt{k^2}=k\in\mathbb{N}$, es decir si $n\in\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ \ldots\}$.

8. Si $n\in\mathbb{N}$ y $n>1$, ordena de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{1}{n+1}\ ,\ n\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ -\frac{1}{n}\ ,\ \frac{1}{-n-1}$$

Puesto que $n>1$, tenemos que $n+1>n>1$, de donde claramente $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$, y de aquí se tiene que también claramente que $-\frac{1}{n}<-\frac{1}{n+1}\Rightarrow -\frac{1}{n}<\frac{1}{-n-1}$. Y puesto que los negativos son menores que los positivos tenemos finalmente la siguiente cadena ordenada de menor a mayor: $\frac{1}{-n-1}<-\frac{1}{n}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<n$.

9. Sea a un número real. Ordena de menor a mayor los números a, a^2, $\frac{1}{a}$ y $\sqrt{a}$ en los dos casos siguientes:

a) Si $a>1$; b) Si $0<a<1$

a) Si $a>1$, entonces $a^2>a>1$ y $\frac{1}{a}<1$, con lo que $\frac{1}{a}<1<a<a^2$. Además, como lógicamente $\sqrt{a}<a$, finalmente obtenemos la siguiente cadena de desigualdades de menor a mayor: $\frac{1}{a}<\sqrt{a}<a<a^2$.

b) Si $0<a<1$, entonces $a^2<a<1$ y $\frac{1}{a}>1$, con lo que $a^2<a<1<\frac{1}{a}$. Además, en este caso ocurre exactamente lo contrario que en el apartado anterior: $\sqrt{a}>a$ (ya que $a^2<a$ como se ha visto). Por tanto, tenemos finalmente que $a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$. Por cierto, $\sqrt{a}<\frac{1}{a}$ porque $\sqrt{a}<1$ y $1<\frac{1}{a}$.

10. Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 20 cm de diámetro. ¿El resultado es un número racional o irracional?

Piénsese que la diagonal de este cuadrado medirá 20 cm (haz una figura de la situación y verás). Entonces, si llamamos x al lado del cuadrado, por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$x^2+x^2=20^2\Rightarrow 2x^2=400\Rightarrow x^2=200\Rightarrow x=\sqrt{200}\Rightarrow x=10\sqrt{2}$ cm.

Por ser $\sqrt{2}$ un número irracional, también lo es este resultado.

11. Calcula la altura y el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 1 m. ¿Ambos números son racionales o irracionales?

Si trazamos la altura h de este triángulo equilátero queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales, uno de cuyos catetos es precisamente h, el otro $\frac{1}{2}$, y su hipotenusa igual a 1 (¡dibújalo!)

Entonces, por el teorema de Pitágoras: $1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 = h^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m.

El área A del triángulo será: $A = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ambos números son claramente irracionales por serlo $\sqrt{3}$.

12. Expresa los siguientes conjuntos mediante intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 8\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 12\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$; e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\right\}$

a) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 8\} = (-2, 8]$.

b) $\{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 12\} = [4, 12]$.

c) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x\} = (1, +\infty)$.

d) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\} = (-\infty, 5]$.

e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

13. Representa gráficamente los siguientes conjuntos y expresa también el resultado en forma de intervalo:

a) $(0, 4) \cup (-1, 3]$; b) $(5, +\infty) \cap (4, 7)$; c) $(-4, 8) \cap (1, +\infty)$;
d) $(-\infty, 6] \cap (-2, 8]$; e) $[-1, 1) \cup (0, 3]$

Haciendo la representación gráfica, que es muy sencilla, obtenemos fácilmente el resultado en forma de intervalo (hay que tener cuidado y distinguir bien los casos de unión y de intersección).

a) $(0, 4) \cup (-1, 3] = (-1, 4)$.

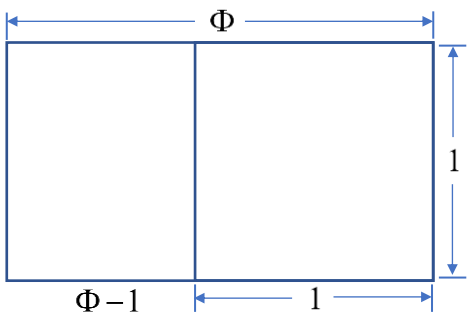
b) $(5, +\infty) \cap (4, 7) = (5, 7)$.

c) $(-4, 8) \cap (1, +\infty) = (1, 8)$.

d) $(-\infty, 6] \cap (-2, 8] = (-2, 6]$.

e) $[-1, 1) \cup (0, 3] = [-1, 3]$.

14. Obtén el valor exacto de Φ, teniendo en cuenta que el rectángulo de dimensiones $\Phi:1$ es semejante al rectángulo que resulta de suprimirle al rectángulo anterior un cuadrado de lado 1, tal y como se indica en la figura de la derecha. Recuerda que dos figuras son semejantes cuando lados homólogos son proporcionales. Al número Φ se le llama *número de oro*, *razón áurea* o *divina proporción*.



Según el enunciado tenemos la siguiente proporción: $\dfrac{\Phi}{1}=\dfrac{1}{\Phi-1}$.

Entonces: $\Phi\left(\Phi-1\right)=1\Rightarrow\Phi^2-\Phi-1=0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos:

$$\Phi=\frac{1\pm\sqrt{\left(-1\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-1\right)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

La solución $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ hemos de descartarla porque es negativa y una longitud negativa no tiene sentido. Por tanto:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este es número Φ es irracional y aproximadamente igual a $1{,}618$.